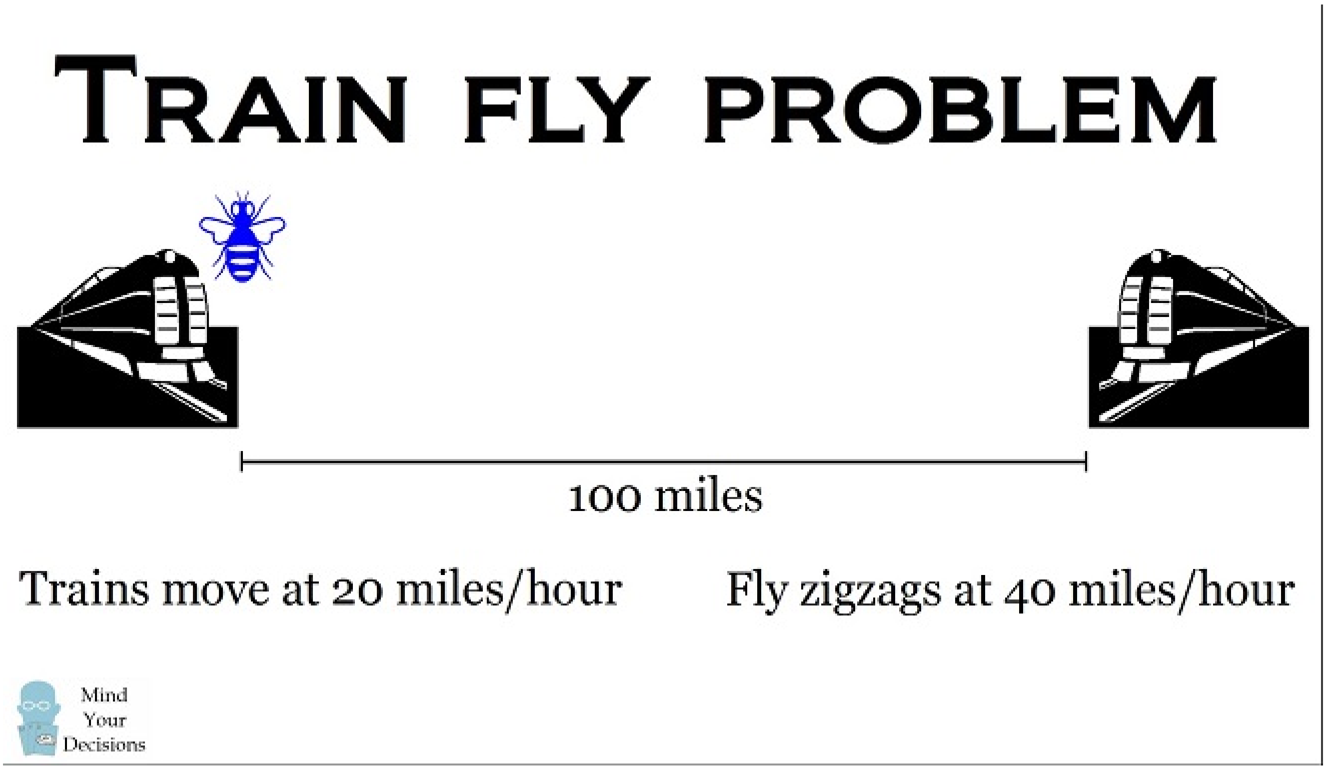
11 Νοεμβρίου 2017

Δυο τραίνα, μια μύγα και η απρόσμενη απάντηση του Φον Νιούμαν…

Επιστήμες / Φυσική - Χημεία

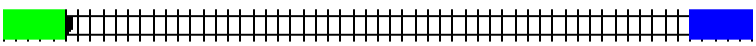


Πολλές φορές αναρωτήθηκα αν το μυαλό του ανήκε σε κάτι ανώτερο από άνθρωπο.

Hans A. Bethe (Νόμπελ Φυσικής 1967)

Όλοι σας, ελπίζω, έχετε δει την εξαιρετική ταινία του Ρον Χάουαρντ *‘Ένας Υπέροχος Άνθρωπος» (A Beautiful Mind)* που αφηγείται την ζωή του νομπελίστα μαθηματικού Τζον Νας. Το φιλμ δεν εστιάζει τόσο στο σημαντικό ερευνητικό έργο του στα μαθηματικά και την θεωρία παιγνίων όσο στον αγώνα που έδωσε με την σχιζοφρένεια. Σε μια σκηνή της ταινίας, ο Νας, σε προχωρημένη ηλικία,φέρεται να αφηγείται σε μια ομάδα φοιτητών το πρόβλημα με τα δυο τραίνα και την μύγα.Ένα κλασικό πρόβλημα που αποτυπώνει την διαφορά ανάμεσα στην τετριμμένη μακροσκελή λύση και στην ευφυή λύση αστραπή (A-ha solution).

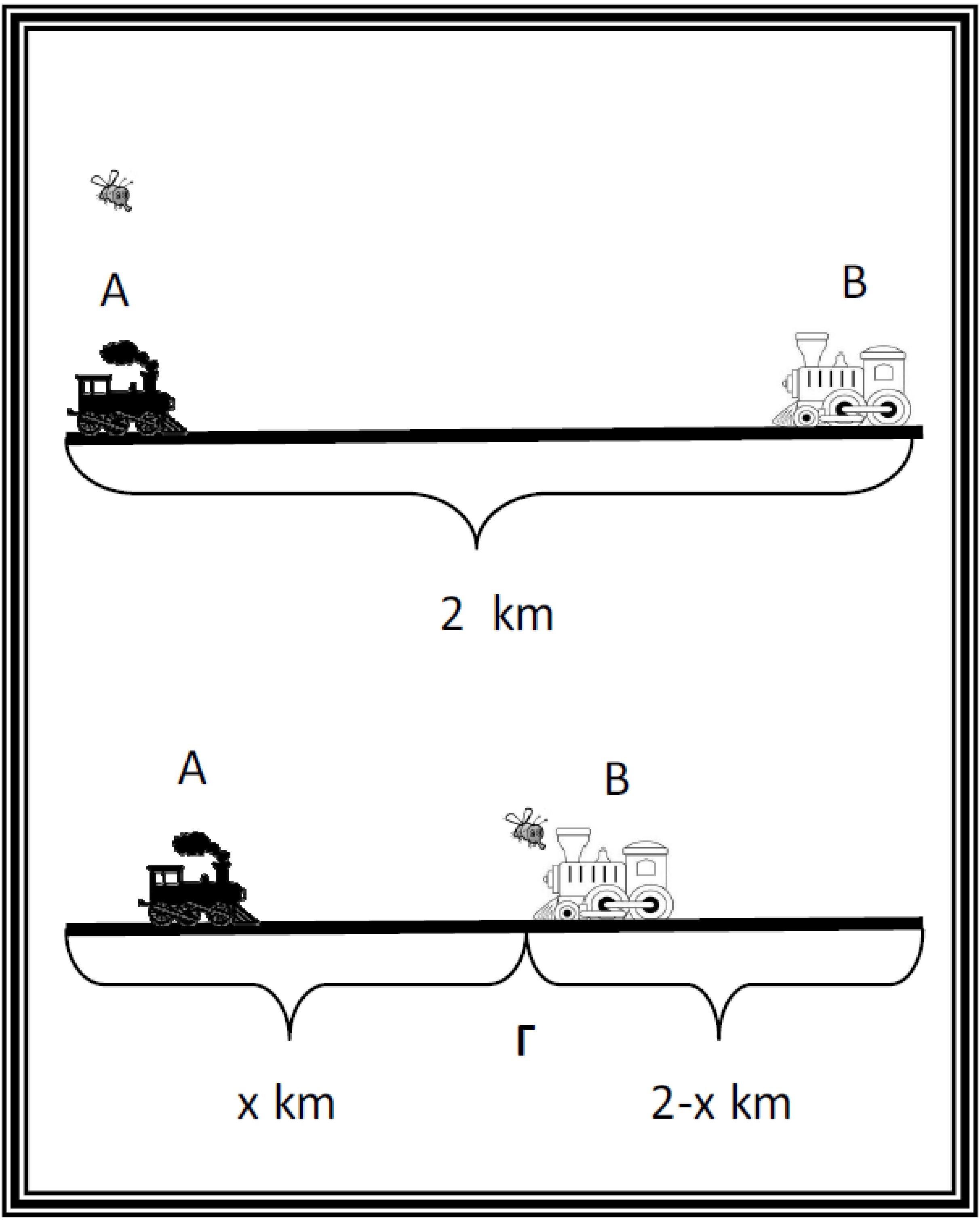
Δύο τρένα κινούνται πάνω στην ίδια γραμμή σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα 60 km/h το καθένα. Όταν βρίσκονται σε απόσταση 2 km μια μύγα που κάθεται στο μπροστινό τζάμι του ενός ξεκινάει με προορισμό το άλλο τρένο, μόλις το φτάσει αλλάζει κατεύθυνση και επιστρέφει στο πρώτο, μόλις φτάσει στο πρώτο τρένο ξανά-αλλάζει κατεύθυνση και επιστρέφει στο δεύτερο, κ.ο.κ. Αν η μύγα ταξιδεύει με 90 km/h, πόση απόσταση θα έχει διανύσει ώσπου να συγκρουστούν τα δύο τρένα;



Εντάξει, γνωρίζω ότι δεν υπάρχει μύγα που να πετά με τόσο μεγάλη ταχύτητα. Ποιητική μαθηματική αδεία!
Δυο διαφορετικές προσεγγίσεις.

1^{η} προσέγγιση (Ακολουθώντας την πεπατημένη)

Έστω ότι η μύγα ξεκινά από το τζάμι του τραίνου Α με ταχύτητα 1,5 km/min και διανύει απόσταση x km προτού συναντήσει το τραίνο Β που κινείται με ταχύτητα 1 km/min και θα έχει διανύσει απόσταση 2-x km.



Στο σημείο Γ που συναντώνται η μύγα και το τραίνο Β έχουν κινηθεί για το ίδιο χρονικό διάστημα t . Από τον τύπο της ταχύτητας u=s/t για την μύγα και το τραίνο Β, έχουμε:

$$u_{M\upsilon\gamma\alpha\varsigma} = \frac{S_{M\upsilon\gamma\alpha\varsigma}}{t} \Leftrightarrow 1,5 = \frac{\mathrm{X}}{t} \Leftrightarrow t = \frac{\mathrm{X}}{1,5}$$

$$u_{\mathrm{T}\rho\alpha\acute{\iota}\nu o\upsilon \mathrm{B}} = \frac{S_{\mathrm{T}\rho\alpha\acute{\iota}\nu o\upsilon \mathrm{B}}}{t} \Leftrightarrow 1 = \frac{2-\mathrm{X}}{t} \Leftrightarrow t = \frac{2-\mathrm{X}}{1} \Leftrightarrow t = 2-\mathrm{X}$$

Τα πρώτα μέλη είναι ίσα άρα:

$$\frac{\mathrm{X}}{1,5} = 2-\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X} = 3-1,5\mathrm{X} \Leftrightarrow 2,5\mathrm{X} = 3 \Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{3}{2,5} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{6}{5}\,\mathrm{km}$$

άρα η μύγα θα έχει πετάξει απόσταση x=6/5 km.Το συνολικό χρονικό διάστημα t με αντικατάσταση θα είναι t=2-(6/5)=4/5λεπτά.

Στο χρονικό διάστημα των 4/5 λεπτών τα δυο τραίνα θα έχουν διανύσει συνολική απόσταση 2(4/5)=8/5km. Άρα θα απέχουν μεταξύ τους 2-8/5=2/5 km. Δηλαδή, θα απέχουν απόσταση το 1/5 της συνολικής διαδρομής και το μοτίβο θα επαναληφθεί. Όποτε, αν θεωρήσουμε το επαναλαμβανόμενο ζιγκ-ζαγκ της μύγας η συνολική απόσταση που θα διανύσει -καθώς κάθε φορά θα κάνει τα 6/5 της απόστασης των τραίνων- θα δίνεται από το παρακάτω άθροισμα άπειρων όρων μια γεωμετρικής προόδου.

$$\frac{6}{5} + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + ... = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + ...\right) \quad (3)$$

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα. Αρχικά συμβολίζουμε:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + ..$$

(1)

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με το 1/5

$$\frac{1}{5}\Sigma = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + ..$$

(2)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δυο σχέσεις:

(1)-(2):

$$\Sigma - \frac{1}{5}\Sigma = 1 \Leftrightarrow \Sigma(1 - \frac{1}{5}) = 1 \Leftrightarrow \Sigma\frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \Sigma = \frac{5}{4}$$

Από την (3) η συνολική απόσταση που διένυσε η μύγα είναι(6/5) (5/4)=1,5 km.

2η προσέγγιση (Μα είναι δυνατόν να λύνεται τόσο απλά;)

Τα τραίνα κινούνται με 60 km/h ή 1 km/min και εφόσον απέχουν 2 km θα συναντηθούν σε ένα λεπτό.Σε ένα λεπτό η μύγα με ταχύτητα 90 km/h ή 1,5 km/min θα έχει διανύσει 1,5 km.

Ο Γιάνος Φον Νιούμαν (1903 –1957) ήταν Ούγγρος μαθηματικός που ζούσε στις Η.Π.Α. Πολύγλωσσος,διέθετε φωτογραφική μνήμη και εκτελούσε αστραπιαία ογκώδεις υπολογισμούς με χαρακτηριστική ευκολία. Καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο Πρίνστον,πρωτεργάτης στην RAND με πλούσιο ερευνητικό έργο τόσο στα μαθηματικά όσο και στην νεοσύστατη –εκείνη την εποχή-επιστήμη των υπολογιστών. Καθολική ευφυΐα με ημερομηνία λήξης κατά τα λεγόμενα του,τα τριάντα χρόνια, όριο που το παρέτεινε στα σαράντα και κατόπιν στα πενήντα καθώς γερνούσε.Αιρετικός στις πολιτικές του απόψεις, ζητούσε τον βομβαρδισμό της Σοβιετικής ένωσης για να μην προλάβουν να αναπτύξουν πυρηνικά και έχουν την ευκαιρία να επιτεθούν εκείνοι πρώτοι. Όταν του τέθηκε το παραπάνω πρόβλημα-με ποδήλατα αντί για τραίνα-σκέφτηκε μερικά δευτερόλεπτα και ανακοίνωσε την λύση. «*Ξέρετε*», του είπαν, «*υπάρχει και μια μακροσκελής λύση με το άθροισμα των απείρων όρων μια ακολουθίας*

.» Τους κοίταξε και με μειλίχιο ύφος απάντησε «*μα το άθροισμα υπολόγισα*.»

Ακόμα και αν δεν είναι εντελώς αλήθεια παραμένει μια καλή ιστορία!

Πηγή: mathhmagic.blogspot.gr

http://bit.ly/2hkrhw5